

特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析*

野田尚昭^{*1}, 松尾忠利^{*2}
原田昭治^{*1}, 中村資生^{*3}Singular Integral Equation Method in the Analysis
of Interaction between Ellipsoidal InclusionsNao-Aki NODA, Tadatoshi MATSUO,
Shoji HARADA and Motoo NAKAMURA

This paper describes numerical solutions of singular integral equations of the body force method in interaction problems of ellipsoidal inclusions under uniform tension. The problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where the densities of body forces distributed in the r -and z -directions of infinite bodies having the same elastic constants of the matrix and inclusions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the inclusions, eight fundamental density functions proposed in our previous paper are used. Then the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. The present method is found to give rapidly converging numerical results for stress distribution along the boundaries of both the matrix and inclusions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Ellipsoidal Inclusion, Interaction Effect

1. 緒 言

機械構造物や材料の欠陥として、空かや介在物が考えられる。したがって材料の信頼性評価のためには、これらの欠陥による応力集中や、欠陥周囲の応力分布を把握する必要がある。また、構造物中に介在物などの欠陥が複数個存在するときには、干渉効果により介在物が単独に存在する場合と異なる値の応力集中を生じる。このとき、最大応力の発生位置と大きさは介在物の大きさと位置および母材と介在物の弾性比により微妙に変化する。そのため厳密な解析には母材と介在物の境界上のなめらかな応力分布を求める必要がある。

著者らはこれまでに体積力法を用いた応力集中問題の解析において、未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を提案した⁽¹⁾。さらに、体積力法の特異積分方程式を精度よく解析するために必要な新しい基本密度関数を定義した⁽²⁾。この方法を用いれば、未知関数が連続関数として近似されるために、境界上

の任意の点の応力が少ない計算時間で正確に求められるという利点がある^{(1)~(6)}。

本研究では、無限体中に二つの回転だ円体状介在物

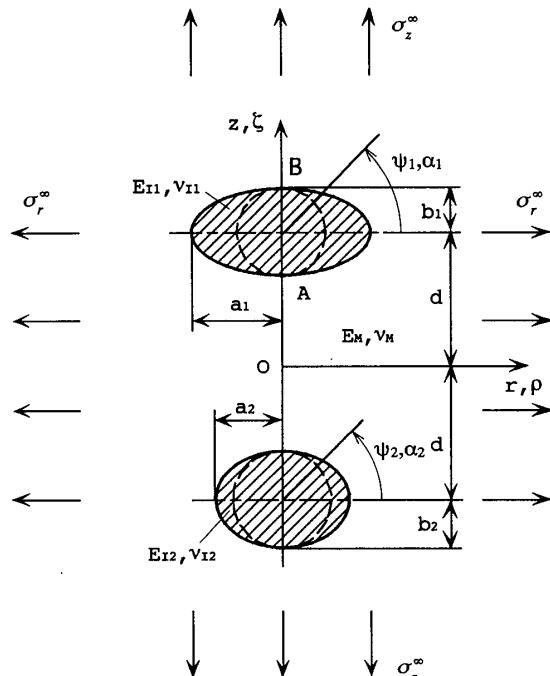


図 1 無限体中の二つの回転だ円体状介在物

* 平成6年10月14日 材料力学講演会および平成6年11月5日北九州地方講演会において講演、原稿受付 平成6年11月14日。

^{*1} 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畠区仙水町1-1)。

^{*2} 正員、九州工業大学大学院。

^{*3} 学生員、九州工業大学大学院。

が存在する場合の応力集中問題を体積力法の特異積分方程式を精度よく解析して考察する。本論文の方法によれば、母材と介在物の境界上の任意の点の応力を正確に求めることが可能である。また、介在物の大きさと距離および母材と介在物の弾性比を変化させて干渉効果を系統的に調べる。

2. 回転だ円体状介在物の干渉問題の数値解析法

本解析方法を図1に示すような、遠方で一様な φ 方向の引張応力 σ_z^∞ と r 方向の引張応力 σ_r^∞ が作用している無限体中の大きさおよび弾性率の異なる二つの回転だ円体状介在物の干渉問題を例にとって説明する。この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、無限体中の半径 ρ_k 、高さ h_k の円周上に

半径方向および軸方向の集中力の輪が作用するときの任意の点(r_i, z_i)の応力場の解($K_{nn}^{Fr}, K_{nn}^{Fz}, K_{nt}^{Fr}, K_{nt}^{Fz}$)と変位場の解($K_{ur}^{Fr}, K_{ur}^{Fz}, K_{uz}^{Fr}, K_{uz}^{Fz}$)を用いて解くことができる⁽⁷⁾⁽⁹⁾。ここで、着力点の円筒座標を(ρ_k, α_k, ξ_k)として注目点の円筒座標(r_i, ϕ_i, z_i)と区別して用いるものとすれば、 $\rho_1 = a_1 \cos \alpha_1, \xi_1 = d + b_1 \sin \alpha_1, \rho_2 = a_2 \cos \alpha_2, \xi_2 = -d + b_2 \sin \alpha_2, r_1 = a_1 \cos \phi_1, z_1 = d + b_1 \sin \phi, r_2 = a_2 \cos \phi_2, z_2 = -d + b_2 \sin \phi_2$ である。このとき問題は、母材(E_M, ν_M)および介在物(E_{I1}, ν_{I1})と(E_{I2}, ν_{I2})と同じ弾性定数をもつ無限体(これらを無限体 M と無限体 I_1, I_2 とする)中の仮想境界上に分布させた r, z 方向の体積力密度 $\rho_{rM}^{k*}(\alpha_k), \rho_{zM}^{k*}(\alpha_k)$ および $\rho_{ri}^{k*}(\alpha_k), \rho_{zi}^{k*}(\alpha_k)$ を未知関数($k=1, 2$:合計8種類)とする特異積分方程式(1), (2)で表現される。

ここで、

$$-\pi/2 \leq \psi_i \leq \pi/2 \quad (i=1, 2) \\ -d\rho_k = a_k \sin \alpha_k da_k, \quad d\xi_k = b_k \cos \alpha_k da_k, \quad ds = \sqrt{a_k^2 \sin^2 \alpha_k + b_k^2 \cos^2 \alpha_k} da_k \quad (k=1, 2) \quad \dots \quad (3)$$

である。また、 ψ_{i0} は点 (r_i, z_i) における介在物の外向き法線と r 軸のなす角度である。

無限体 M 中の回転だ円体状空かとなるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ, σ_{nMi} , τ_{ntMi} , U_{rMi} , U_{zMi} , 無限体 I_i 中の回転だ円体状介在物となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ, σ_{nli} , τ_{ntli} , U_{rli} , U_{zli} とすると式(1), (2)は母材と介在物の接合境界上における境界条件 $\sigma_{nMi} - \sigma_{nli} = 0$, $\tau_{ntMi} - \tau_{ntli} = 0$, $U_{rMi} - U_{rli} = 0$, $U_{zMi} - U_{zli} = 0$ に相当している。式(1)の第1項と第2項は、体積力を無限小近傍からなる境界上⁽⁷⁾に作用させたとき境界条件を満たすべき仮想境界上に生じる応力の項である。また, $K_{nnM}^{Fr}(a_k, \psi_i)$ を例にとると、これは無限体 M の仮想境界上の1円周上に r 方向に集中力の輪が作用するとき境界上の点に生じる法線方向の垂直応力 σ_{nM} を意味している。 $K_{nnM}^{Fr}(a_k, \psi_i)$ などは式(4)～(12)で示される、集中力の輪による応力場、変位場の式に母材の弾性定数や着力点、注目点の座標を代入したものとして表される。

$$K_{nn}^{Fr} = \sigma_n^{Fr} = \sigma_r^{Fr} \cos^2 \psi + \sigma_z^{Fr} \sin^2 \psi + 2\tau_{rz}^{Fr} \sin \psi \cos \psi, K_{nn}^{Fz} = \sigma_n^{Fz} = \sigma_r^{Fz} \cos^2 \psi + \sigma_z^{Fz} \sin^2 \psi + 2\tau_{rz}^{Fz} \sin \psi \cos \psi$$

$$K_{nt}^{Fr} = \tau_{nt}^{Fr} = (\sigma_z^{Fr} - \sigma_r^{Fr}) \sin \psi \cos \psi + 2\tau_{rz}^{Fr} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi)$$

表 1 境界に沿った未知関数の収束性 ($a_1=a_2$, $a_1/b_1=a_2/b_2=1$, $a_1/d=2/3$, $E_I/E_M=0.5$, $\sigma_r^\infty=0$, $\sigma_z^\infty=1$)

(a) 母材

ψ (deg.)	M	ρ_{r3M}	ρ_{z2M}	ρ_{r4M}	ρ_{z1M}
0.	4	0.0529	2.0166	-0.0033	-0.0323
	8	0.0611	2.0155	-0.0137	-0.0223
	12	0.0614	2.0157	-0.0146	-0.0220
	16	0.0614	2.0158	-0.0147	-0.0220
20.	4	0.0630	2.0067	-0.0134	-0.0199
	8	0.0647	2.0110	-0.0180	-0.0179
	12	0.0644	2.0114	-0.0180	-0.0183
	16	0.0644	2.0114	-0.0179	-0.0183
40.	4	0.0885	1.9815	-0.0388	0.0115
	8	0.0761	1.9955	-0.0295	-0.0030
	12	0.0763	1.9952	-0.0295	-0.0026
	16	0.0763	1.9952	-0.0295	-0.0026
60.	4	0.1175	1.9530	-0.0677	0.0473
	8	0.1027	1.9607	-0.0525	0.0352
	12	0.1027	1.9609	-0.0526	0.0349
	16	0.1027	1.9609	-0.0527	0.0349
80.	4	0.1365	1.9343	-0.0866	0.0707
	8	0.1346	1.9217	-0.0792	0.0821
	12	0.1337	1.9218	-0.0778	0.0819
	16	0.1336	1.9218	-0.0778	0.0818
90.	4	0.1391	1.9312	-0.0892	0.0739
	8	0.1401	1.9151	-0.0837	0.0902
	12	0.1392	1.9148	-0.0822	0.0905
	16	0.1392	1.9149	-0.0821	0.0905

ψ (deg.)	M	ρ_{r3I}	ρ_{z2I}	ρ_{r4I}	ρ_{z1I}
0.	4	0.1089	-0.0004	-0.0072	-0.0040
	8	0.1217	-0.0291	-0.0265	0.0221
	12	0.1222	-0.0274	-0.0302	0.0231
	16	0.1222	-0.0274	-0.0303	0.0231
20.	4	0.1247	-0.0316	-0.0240	0.0301
	8	0.1283	-0.0364	-0.0411	0.0368
	12	0.1278	-0.0405	-0.0362	0.0358
	16	0.1278	-0.0404	-0.0362	0.0358
40.	4	0.1649	-0.1108	-0.0666	0.1165
	8	0.1494	-0.0870	-0.0576	0.0840
	12	0.1499	-0.0876	-0.0578	0.0850
	16	0.1499	-0.0876	-0.0578	0.0850
60.	4	0.2105	-0.2008	-0.1151	0.2148
	8	0.2006	-0.1851	-0.1024	0.1965
	12	0.2002	-0.1846	-0.1023	0.1956
	16	0.2002	-0.1846	-0.1023	0.1957
80.	4	0.2403	-0.2595	-0.1467	0.2789
	8	0.2623	-0.2956	-0.1538	0.3309
	12	0.2622	-0.2960	-0.1533	0.3316
	16	0.2622	-0.2960	-0.1533	0.3316
90.	4	0.2444	-0.2675	-0.1510	0.2877
	8	0.2729	-0.3142	-0.1626	0.3540
	12	0.2736	-0.3160	-0.1624	0.3566
	16	0.2736	-0.3160	-0.1624	0.3567

$$\begin{cases} \rho_{r2M}^k(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{n_k/2} a_{nM} t_n(\alpha_k) & \rho_{z1M}^k(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{n_k/2} c_{nM} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{r4M}^k(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{n_k/2} b_{nM} t_n(\alpha_k) & \rho_{z3M}^k(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{n_k/2} d_{nM} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{r2I}^k(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{n_k/2} a_{nI} t_n(\alpha_k) & \rho_{z1I}^k(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{n_k/2} c_{nI} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{r4I}^k(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{n_k/2} b_{nI} t_n(\alpha_k), & \rho_{z3I}^k(\alpha_k) = \sum_{n=1}^{n_k/2} d_{nI} t_n(\alpha_k) \end{cases} \quad (17)$$

$$t_n^k(\alpha_k) = \cos\{2(n-1)\alpha_k\} \quad (18)$$

ここで、 n_1, n_2 はそれぞれ、 $-\pi/2 \leq \psi_1 \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq \psi_2 \leq \pi/2$ の範囲の選点数である。以上の離散化の方法により式(1), (2)は、次式で示される $4(n_1+n_2)$ 元の連立方程式に還元される。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{n_k/2} (a_{nM}^k A_{nM}^k + b_{nM}^k B_{nM}^k + c_{nM}^k C_{nM}^k + d_{nM}^k D_{nM}^k + a_{nI}^k A_{nI}^k + b_{nI}^k B_{nI}^k + c_{nI}^k C_{nI}^k + d_{nI}^k D_{nI}^k) \\ &= -(\sigma_z^\infty \sin^2 \psi_{i0} + \sigma_r^\infty \cos^2 \psi_{i0}) \\ & \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{n_k/2} (a_{nM}^k E_{nM}^k + b_{nM}^k F_{nM}^k + c_{nM}^k G_{nM}^k + d_{nM}^k H_{nM}^k + a_{nI}^k E_{nI}^k + b_{nI}^k F_{nI}^k + c_{nI}^k G_{nI}^k + d_{nI}^k H_{nI}^k) \\ &= -(\sigma_z^\infty - \sigma_r^\infty) \sin \psi_{i0} \cos \psi_{i0} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{n_k/2} (a_{nM}^k I_{nM}^k + b_{nM}^k J_{nM}^k + c_{nM}^k K_{nM}^k + d_{nM}^k L_{nM}^k + a_{nI}^k I_{nI}^k + b_{nI}^k J_{nI}^k + c_{nI}^k K_{nI}^k + d_{nI}^k L_{nI}^k) \\ &= -\{\sigma_r^\infty - \nu_M(\sigma_r^\infty + \sigma_z^\infty)\} r / E_M \\ & \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{n_k/2} (a_{nM}^k M_{nM}^k + b_{nM}^k N_{nM}^k + c_{nM}^k O_{nM}^k + d_{nM}^k P_{nM}^k + a_{nI}^k M_{nI}^k + b_{nI}^k N_{nI}^k + c_{nI}^k O_{nI}^k + d_{nI}^k P_{nI}^k) \\ &= -\{\sigma_z^\infty - \nu_M(\sigma_r^\infty + \sigma_z^\infty)\} z / E_M \end{aligned} \quad (20)$$

$$A_{nM}^k = -(1/2) t_n^k(\psi_i) \cos^2 \psi_{i0} \tan \psi_i + \sum_{k=1}^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{Fr}(\alpha_k, \psi_i) t_n^k(\alpha_k) b_k \sin \alpha_k \cos \alpha_k d\alpha_k \quad (21)$$

任意の点の応力は $4(n_1+n_2)$ 個の係数 a_{nM}, \dots, d_{nI} と A_{nM}, \dots, P_{nI} に相当する影響係数の一次結合で表現される。以上の解析方法により回転だ円体状介在物の干渉効果を介在物の大きさと形状比および弾性比を系統的に変化させて

解析する。

3. 解析結果および考察

3.1 等大2球状介在物が $\sigma_z^\infty=1, \sigma_r^\infty=0$ を受ける場合 図1に示した二つの回転だ円体状介在物の問題において、形状比が $a_1=a_2, a_1/b_1=a_2/b_2=1, a_1/d=2/3, E_{I1}/E_M=E_{I2}/E_M=0.5, \nu_{I1}=\nu_{I2}=\nu_M=0.3$ の場合、未知関数 $\rho_{r3M}, \rho_{z2M}, \rho_{r4M}, \rho_{z1M}, \rho_{r3I}, \rho_{z2I}, \rho_{r4I}, \rho_{z1I}$ の収束状況を表1に示す。未知関数を基本密度関数と重み関数の一次結合で表現する本解析結果は、選点数 $M=12$ 程度で有効数字5桁まで収束している。このような良好な収束性を示すことから、連続関数である密度分布をうまく近似できているものと考えられる。また、この場合の境界に沿った応力 $\sigma_{tM}, \sigma_{nM}, \tau_{ntM}, \sigma_u, \sigma_{nI}, \tau_{ntI}$ の収束状況を表2に示す。本解析結果は、 $M=12$ 程度で有効数字5桁まで収束している。さらに境界条件($\sigma_{nM}-\sigma_{nI}=0, \tau_{ntM}-\tau_{ntI}=0, U_{rM}-U_{rI}=0, U_{zM}-U_{zI}$)の満足度を確かめるために、それらの値を表3に示す。境界上で零であるべき、 $\sigma_{nM}-\sigma_{nI}$ 等の値は境界全周で $M=12$ 程度でも 10^{-6} 程度であり高い境界条件の満足度が確かめられた。

次に、形状比が $a_1=a_2, a_1/b_1=a_2/b_2=1, E_{I1}/E_M=$

表2 境界に沿った応力の収束性 ($a_1=a_2, a_1/b_1=a_2/b_2=1, a_1/d=2/3, E_{I1}/E_M=0.5, \sigma_r^\infty=0, \sigma_z^\infty=1$)

ψ (deg.)	M	σ_{tM}	σ_{rI}	σ_{nM}	σ_{nI}	τ_{ntM}	τ_{ntI}
-90.	4	-0.2227	0.0081	0.5991	0.5620	0.0000	0.0000
	8	-0.2066	0.0265	0.6078	0.6064	0.0000	0.0000
	12	-0.2059	0.0273	0.6081	0.6081	0.0000	0.0000
	16	-0.2059	0.0274	0.6081	0.6081	0.0000	0.0000
-80.	4	-0.1851	0.0181	0.5897	0.5633	-0.0879	-0.0803
	8	-0.1728	0.0408	0.5963	0.5961	-0.0926	-0.0925
	12	-0.1725	0.0415	0.5965	0.5965	-0.0928	-0.0928
	16	-0.1725	0.0416	0.5966	0.5966	-0.0928	-0.0928
-40.	4	0.6263	0.3942	0.2946	0.2986	-0.3101	-0.3282
	8	0.6246	0.3743	0.2940	0.2939	-0.3125	-0.3119
	12	0.6246	0.3754	0.2940	0.2940	-0.3125	-0.3125
	16	0.6246	0.3753	0.2940	0.2940	-0.3125	-0.3125
-5.	4	1.3043	0.6640	0.0253	0.0305	-0.0613	-0.0528
	8	1.3030	0.6577	0.0264	0.0266	-0.0637	-0.0634
	12	1.3030	0.6572	0.0265	0.0265	-0.0638	-0.0638
	16	1.3030	0.6572	0.0265	0.0265	-0.0638	-0.0638
0.	4	1.3225	0.6650	0.0197	0.0256	-0.0048	-0.0030
	8	1.3200	0.6644	0.0204	0.0207	-0.0067	-0.0064
	12	1.3200	0.6644	0.0205	0.0205	-0.0068	-0.0068
	16	1.3200	0.6644	0.0205	0.0205	-0.0068	-0.0068
1.	4	1.3231	0.6642	0.0198	0.0257	0.0059	0.0135
	8	1.3204	0.6645	0.0204	0.0207	0.0041	0.0044
	12	1.3204	0.6646	0.0205	0.0205	0.0040	0.0040
	16	1.3204	0.6646	0.0205	0.0205	0.0040	0.0040
5.	4	1.3157	0.6570	0.0241	0.0299	0.0507	0.0570
	8	1.3124	0.6610	0.0244	0.0246	0.0493	0.0496
	12	1.3122	0.6613	0.0244	0.0244	0.0493	0.0493
	16	1.3122	0.6613	0.0244	0.0244	0.0493	0.0493
40.	4	0.6843	0.3984	0.2856	0.2808	0.3160	0.3145
	8	0.6860	0.4045	0.2854	0.2856	0.3175	0.3175
	12	0.6860	0.4042	0.2854	0.2854	0.3174	0.3174
	16	0.6860	0.4042	0.2854	0.2854	0.3174	0.3174
80.	4	-0.1915	0.0472	0.6527	0.6555	0.1118	0.1119
	8	-0.1935	0.0424	0.6488	0.6488	0.1111	0.1111
	12	-0.1935	0.0423	0.6487	0.6487	0.1110	0.1110
	16	-0.1935	0.0423	0.6487	0.6487	0.1110	0.1110
90.	4	-0.2382	0.0280	0.6729	0.6764	0.0000	0.0000
	8	-0.2411	0.0228	0.6686	0.6687	0.0000	0.0000
	12	-0.2413	0.0226	0.6684	0.6684	0.0000	0.0000
	16	-0.2413	0.0226	0.6684	0.6684	0.0000	0.0000

表3 境界条件の満足度 ($a_1=a_2, a_1/b_1=a_2/b_2=1, a_1/d=2/3, E_{I1}/E_M=E_{I2}/E_M=0.5, \sigma_r^\infty=0, \sigma_z^\infty=1$)

ψ (deg.)	M	$\sigma_{nM}-\sigma_{nI}$	$\tau_{ntM}-\tau_{ntI}$	$U_{rM}-U_{rI}$	$U_{zM}-U_{zI}$
-90.	4	3.7×10^{-2}	0.0	-6.7×10^{-5}	-5.3×10^{-2}
	8	1.3×10^{-3}	0.0	-1.3×10^{-6}	-9.7×10^{-4}
	12	3.7×10^{-5}	0.0	3.8×10^{-8}	4.3×10^{-5}
	16	1.1×10^{-5}	0.0	1.4×10^{-8}	8.0×10^{-6}
-80.	4	2.6×10^{-2}	-7.7×10^{-3}	-2.5×10^{-3}	-4.0×10^{-2}
	8	2.1×10^{-4}	-6.3×10^{-5}	-1.2×10^{-5}	-1.7×10^{-4}
	12	-1.6×10^{-5}	4.8×10^{-6}	5.6×10^{-7}	8.5×10^{-6}
	16	-7.5×10^{-7}	1.7×10^{-7}	-8.7×10^{-8}	2.7×10^{-7}
-40.	4	-4.0×10^{-3}	1.8×10^{-2}	8.3×10^{-3}	3.0×10^{-2}
	8	1.3×10^{-4}	-5.8×10^{-4}	-1.4×10^{-4}	-4.8×10^{-4}
	12	-2.4×10^{-6}	1.0×10^{-5}	1.6×10^{-6}	5.4×10^{-6}
	16	1.9×10^{-8}	-9.1×10^{-8}	-8.7×10^{-9}	-3.1×10^{-8}
-5.	4	-5.2×10^{-3}	-8.5×10^{-3}	-6.4×10^{-3}	-1.8×10^{-2}
	8	-1.8×10^{-4}	-3.0×10^{-4}	-1.2×10^{-4}	-3.0×10^{-4}
	12	-3.2×10^{-6}	-5.6×10^{-6}	-1.3×10^{-6}	-3.4×10^{-6}
	16	-2.4×10^{-8}	-4.9×10^{-8}	-7.7×10^{-9}	-1.9×10^{-8}
0.	4	-5.9×10^{-3}	-7.8×10^{-3}	-6.5×10^{-3}	-1.8×10^{-2}
	8	-2.5×10^{-4}	-3.4×10^{-4}	-1.4×10^{-4}	-3.6×10^{-4}
	12	-7.0×10^{-6}	-9.8×10^{-6}	-2.4×10^{-6}	-6.3×10^{-5}
	16	-1.5×10^{-7}	-2.5×10^{-7}	-4.0×10^{-8}	-1.1×10^{-7}
1.	4	-5.9×10^{-3}	-7.6×10^{-3}	-6.4×10^{-3}	-1.8×10^{-2}
	8	-2.5×10^{-4}	-3.2×10^{-4}	-1.4×10^{-4}	-3.6×10^{-4}
	12	-6.9×10^{-6}	-9.3×10^{-6}	-2.4×10^{-5}	-6.1×10^{-6}
	16	-1.7×10^{-7}	-2.3×10^{-7}	-3.8×10^{-8}	-1.0×10^{-7}
5.	4	-5.7×10^{-3}	-6.3×10^{-3}	-5.7×10^{-3}	-1.6×10^{-3}
	8	-2.0×10^{-4}	-2.2×10^{-4}	-1.0×10^{-4}	-2.6×10^{-4}
	12	-3.7×10^{-6}	-4.3×10^{-6}	-1.2×10^{-6}	-3.0×10^{-6}
	16	-2.9×10^{-8}	-3.8×10^{-8}	-7.0×10^{-9}	-1.7×10^{-8}
40.	4	4.9×10^{-3}	1.5×10^{-3}	3.2×10^{-3}	1.1×10^{-3}
	8	-1.8×10^{-4}	-5.6×10^{-5}	-5.9×10^{-5}	-1.9×10^{-4}
	12	3.4×10^{-6}	1.2×10^{-6}	6.6×10^{-7}	2.2×10^{-6}
	16	-3.2×10^{-8}	-9.3×10^{-9}	-3.7×10^{-9}	-1.3×10^{-8}
80.	4	-2.8×10^{-3}	-4.5×10^{-5}	-5.1×10^{-4}	-8.1×10^{-3}
	8	-2.9×10^{-4}	-6.2×10^{-7}	-2.6×10^{-6}	-3.8×10^{-5}
	12	2.6×10^{-6}	8.6×10^{-8}	1.3×10^{-7}	1.9×10^{-6}
	16	1.3×10^{-7}	7.1×10^{-9}	3.5×10^{-9}	6.4×10^{-8}
90.	4	-3.5×10^{-3}	0.0	-1.3×10^{-5}	-1.1×10^{-2}
	8	-1.6×10^{-4}	0.0	-2.1×10^{-7}	-2.5×10^{-4}
	12	1.3×10^{-6}	0.0	7.7×10^{-8}	-1.2×10^{-4}
	16	9.7×10^{-9}	0.0	1.4×10^{-8}	-5.1×10^{-6}

表4 等大2球状介在物の最大応力とその発生位置
(図1で $a_1=a_2=a, \sigma_r^\infty=0, \sigma_z^\infty=1$ の場合)
[$a_1/b_1=a_2/b_2=1$]

E_I/E_M	a/d	ψ (deg.)	Matrix		Inclusion	
			σ_{max}	ψ (deg.)	σ_{max}	ψ (deg.)
0	1	0	0.0	2.0455		
		1/3	0.3	2.0200		
		1/2	1.2	1.9800		
		2/3	2.4	1.9394		
		0.8	3.3	1.9147		
		0.9	3.8	1.9002		
0.5	1	0	0.0	1.3481	-90.~90.	0.6789
		1/3	0.1	1.3423	90.0	0.6783
		1/2	0.5	1.3324	90.0	0.6734
		2/3	1.0	1.3204	90.0	0.6684
		0.8	1.4	1.3119	90.0	0.6638
		0.9	1.7	1.3067	90.0	0.6601
2.0	1	0	± 67.5	1.3410	-90.~90.	1.3150
		1/3	-67.7	1.3517	90.0	1.3263
		1/2	-69.4	1.3858	-90.0	1.3648
		2/3	-76.3	1.4774	-90.0	1.4715
		0.8	-90.0	1.6522	-90.0	1.6520
		0.9	-90.0	1.8602	-90.0	1.8413
∞	1	0	± 68.0	2.0416	-90.~90.	1.9838
		1/3	-68.4	2.0922	-90.0	1.7863

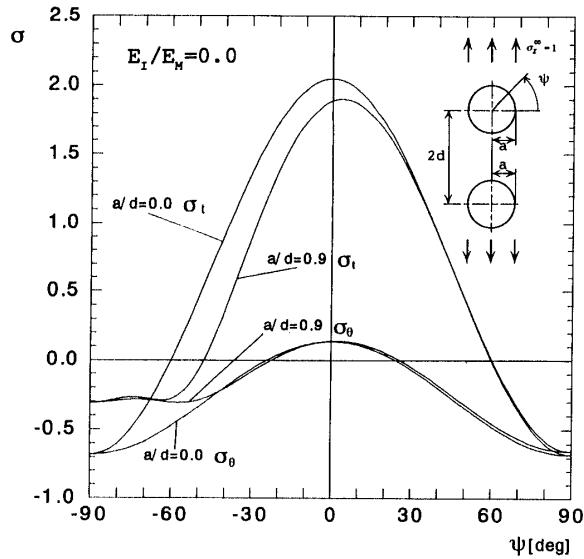
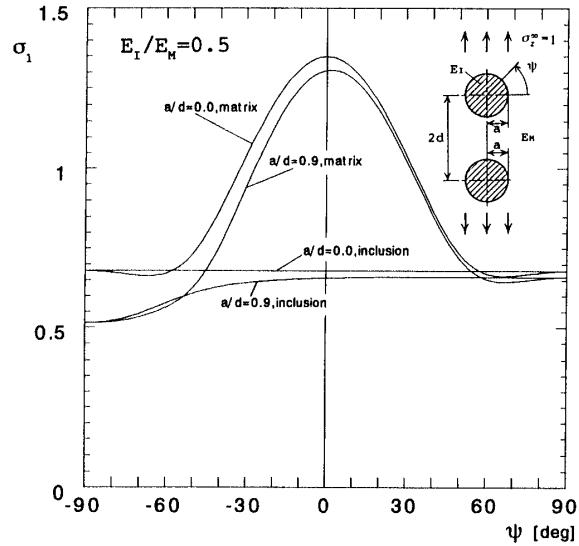
図 2 境界に沿った応力 σ_t, σ_θ の分布

図 3 境界に沿った主応力の分布

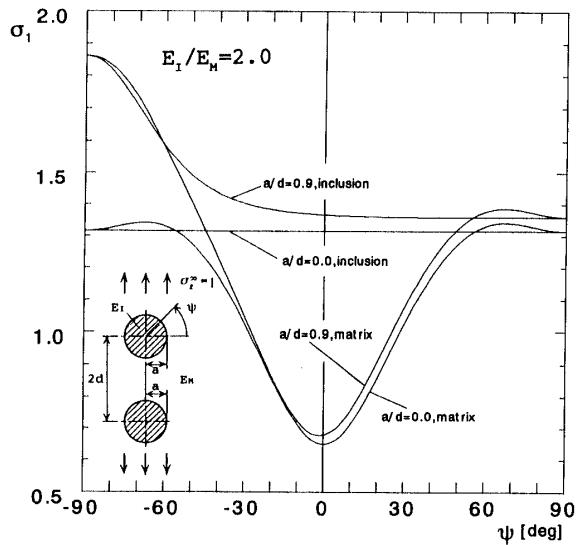


図 4 境界に沿った主応力の分布

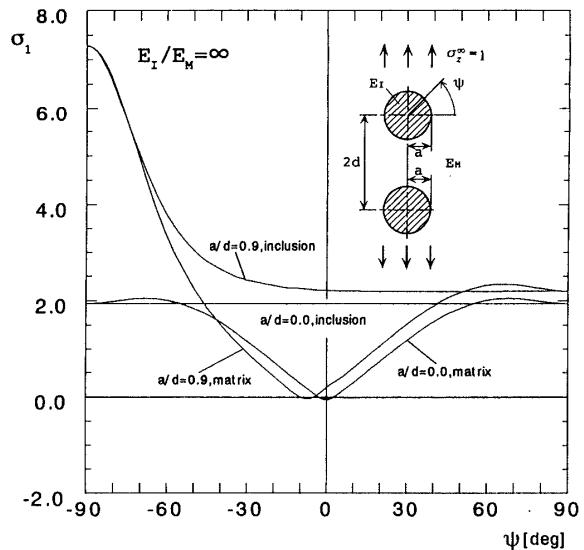
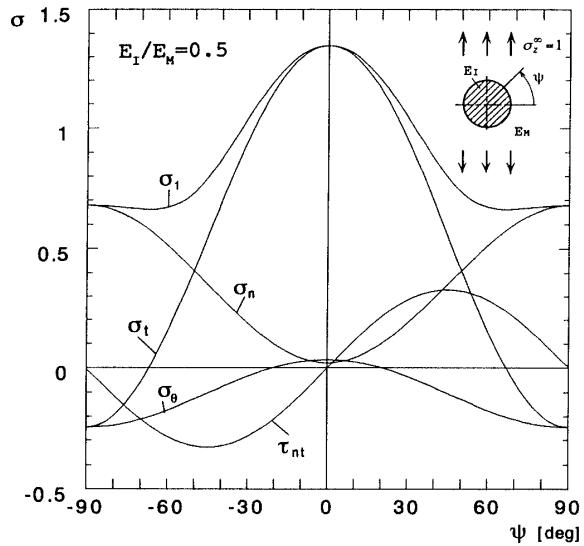
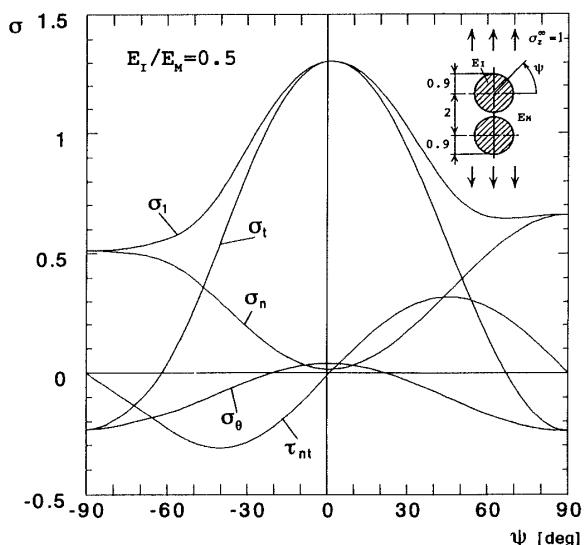


図 5 境界に沿った主応力の分布

図 6 母材の境界上の応力分布 ($a/d=0$)図 7 母材の境界上の応力分布 ($a/d=0.9$)

$E_I/E_M=0, 0.5, 2.0, \infty$, $\nu_{I1}=\nu_{I2}=\nu_M=0.3$ の場合, b_1/d を変化させたときの母材と介在物の最大応力(主応力)の値とその発生位置を表 4 に示す。ここで主応力は σ_n , σ_t , τ_{nt} より求まる第 1 主応力である。表 4 より回転円体状介在物の干渉効果は二次元問題⁽⁴⁾ に比

べると小さいことがわかる。また, $b/d=0, 0.9$, $E_I/E_M=0.0$ の場合境界に沿った応力 σ_t , σ_θ の分布を図 2 に示す。図 3~5 にはそれぞれ $E_I/E_M=0.5, 2.0, \infty$ の場合の主応力の分布を示している。図 2~5 より $E_I < E_M$ の場合には a/d が大きくなるにつれて母材と介在物境界に生じる応力は小さくなり, $E_I > E_M$ の場合には

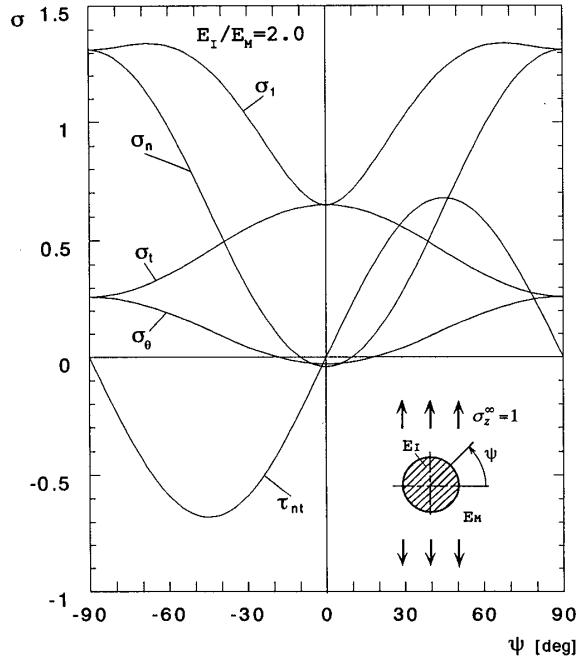
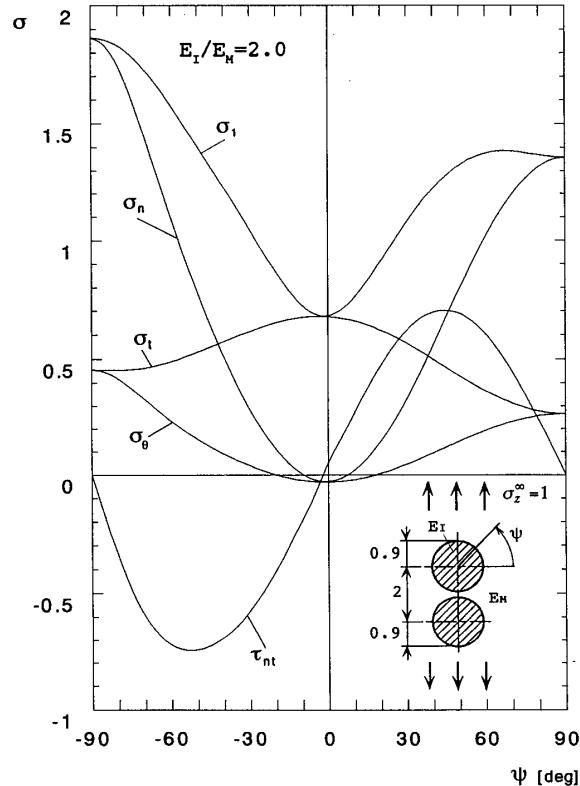
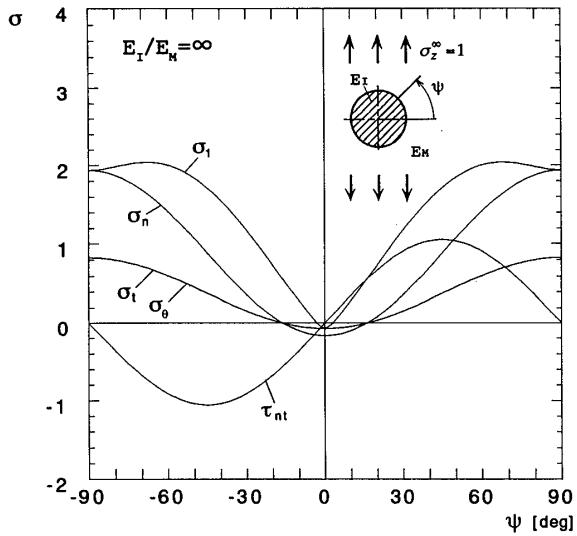
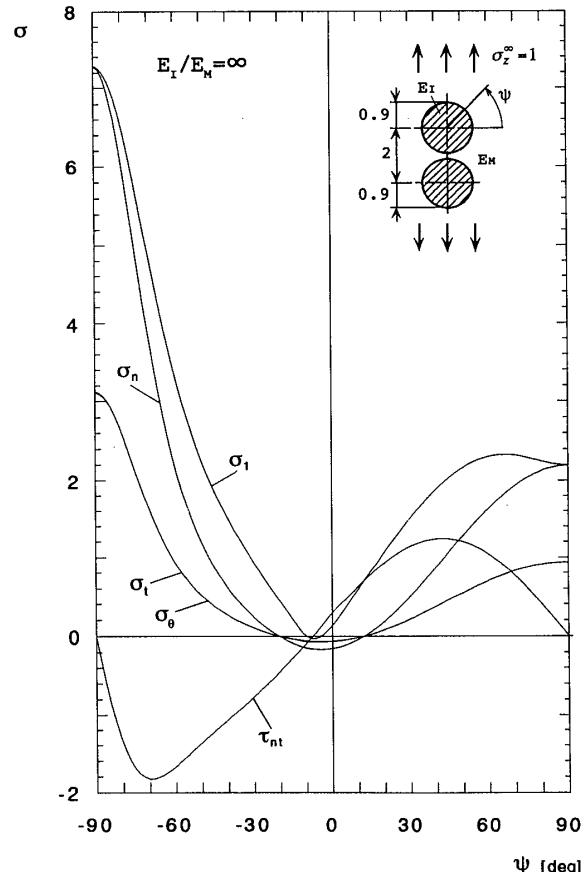
図 8 母材の境界上の応力分布 ($a/d=0$)図 9 母材の境界上の応力分布 ($a/d=0.9$)図 10 母材の境界上の応力分布 ($a/d=0$)図 11 母材の境界上の応力分布 ($a/d=0.9$)

表 5 等大 2 球状空かの最大応力とその発生位置
(図 1 で $a_1=a_2=a$, $\sigma_r^\infty=1$, $\sigma_z^\infty=0$ の場合)
[$a_1/b_1=a_2/b_2=1$]

a/d	A ($\psi=-90^\circ$)		B ($\psi=90^\circ$)	
	Present analysis	Tsuchida [10]	Present analysis	Tsuchida [10]
0	2.1820	2.182	2.1820	2.182
0.1	2.1817	2.18	2.1818	2.18
0.2	2.1798	2.18	2.1812	2.18
0.3	2.1730	2.17	2.1803	2.18
0.4	2.1572	2.16	2.1795	2.18
0.5	2.1292	2.13	2.1796	2.18
0.6	2.0954	2.09	2.1809	2.18
0.7	2.0939	2.09	2.1840	2.19
0.8	2.2395	2.24	2.1889	2.19
0.9	2.8130		2.1960	

表 6 等大 2 球状介在物の最大応力とその発生位置
(図 1 で $a_1=a_2=a$, $\sigma_r^\infty=1$, $\sigma_z^\infty=0$ の場合)
[$a_1/b_1=a_2/b_2=1$]

E _r /E _m	a/d	Matrix		Inclusion	
		ψ (deg.)	σ_{\max}	ψ (deg.)	σ_{\max}
0	0	± 90.0	2.1820		
	1/3	90.0	2.1800		
	1/2	90.0	2.1796		
	2/3	90.0	2.1828		
	0.8	-90.0	2.2395		
	0.9	-90.0	2.8130		
0.5	0	± 90.0	2.2545	-90.~90.	-0.0711
	1/3	90.0	2.2538	-90.0	-0.0598
	1/2	90.0	2.2537	-90.0	-0.0233
	2/3	-90.0	2.2588	-90.0	0.0589
	0.8	-90.0	2.3930	-90.0	0.1363
	0.9	-90.0	2.7835	-90.0	0.2037
2.0	0	± 90.0	2.3152	-90.~90.	-0.1139
	1/3	-90.0	2.3210	-90.0	-0.0915
	1/2	-90.0	2.3439	-90.0	-0.0172
	2/3	-90.0	2.4187	-90.0	0.1698
	0.8	-90.0	2.5775	-90.0	0.4161
	0.9	-90.0	2.8217	-90.0	0.5626
∞	0	± 90.0	2.3695	-90.~90.	-0.1385
	1/3	-90.0	2.3840	-90.0	-0.1098
	1/2	-90.0	2.4347	-90.0	0.0864
	2/3	-90.0	2.5796	-90.0	0.0323
	0.8	-90.0	2.8500	-90.0	0.8160
	0.9	-90.0	3.1452	-90.0	1.0064

表 7 等大 2 だ円体状介在物の最大応力とその発生位置
(図 1 で $a_1=a_2=a$, $\sigma_r^\infty=1$, $\sigma_z^\infty=0$ の場合)

(a) $a_1/b_1=2$

E _r /E _m	b/d	Matrix		Inclusion	
		ψ (deg.)	σ_{\max}	ψ (deg.)	σ_{\max}
0	0	0.0	3.3130		
	1/3	0.6	3.1515		
	1/2	1.5	3.0269		
	2/3	2.1	2.9492		
0.5	0	0.0	1.5435	-90.~90.	0.7854
	1/3	0.4	1.5241	90.0	0.7760
	1/2	0.8	1.5063	90.0	0.7625
	2/3	1.1	1.4928	90.0	0.7468
2.0	0	± 49.4	1.1863	-90.~90.	1.1587
	1/3	45.6	1.2219	17.5	1.2258
	1/2	44.0	1.2560	18.6	1.2693
	2/3	44.0	1.2906	20.5	1.2974
∞	0	± 48.9	1.5040	-90.~90.	1.3784
	1/3	-52.6	1.6600	-90.0	1.5662
	1/2	-81.8	2.0899	-90.0	2.0891
	2/3	-90.0	3.4148	-90.0	3.4148

(b) $a_1/b_1=1/2$

E _r /E _m	b/d	Matrix		Inclusion	
		ψ (deg.)	σ_{\max}	ψ (deg.)	σ_{\max}
0	0	0.0	1.4403		
	1/3	0.2	1.4365		
	1/2	0.7	1.4285		
	2/3	2.0	1.4159		
0.5	0	0.0	1.1811	-90.~90.	0.5912
	1/3	-0.2	1.1798	-90.0	0.5910
	1/2	-0.1	1.1773	-90.0	0.5880
	2/3	0.6	1.1731	-90.0	0.5754
2.0	0	± 78.5	1.5585	-90.~90.	1.5309
	1/3	-78.4	1.5699	-59.2	1.5452
	1/2	-78.2	1.5983	-63.1	1.5766
	2/3	-77.8	1.6807	-68.0	1.6600
∞	0	± 79.0	3.4156	-90.~90.	3.2798
	1/3	-78.8	3.4848	-90.	3.3448
	1/2	-79.0	3.6747	-90.	3.5262
	2/3	-79.5	4.2667	-90.	4.1051

表 8 大きさの異なる二つの球状介在物の最大応力とその発生位置 ($a_1/a_2=2$, $a_1/b_1=a_2/b_2=1$, $E_{r1}=E_{r2}$, $\sigma_r^\infty=0$, $\sigma_z^\infty=1$)

E _r /E _m	a/d	Inclusion 1				Inclusion 2			
		Matrix		Inclusion		Matrix		Inclusion	
		ψ_1 (deg.)	σ_{\max}	ψ_1 (deg.)	σ_{\max}	ψ_2 (deg.)	σ_{\max}	ψ_2 (deg.)	σ_{\max}
0	0	0.	2.0455			0.	2.0455		
	1/3	0.	2.0422			-0.2	2.0162		
	1/2	0.2	2.0369			-0.9	1.9550		
	2/3	0.3	2.0313			-2.5	1.8575		
0.5	0	0.	1.3481	-90.~90	0.6789	0.	1.3481	-90.~90	0.6789
	1/3	0.	1.3476	90.	0.6786	0.	1.3440	-90.	0.6758
	1/2	0.	1.3460	90.	0.6782	-0.3	1.3304	-90.	0.6626
	2/3	0.1	1.3444	90.	0.6775	-0.9	1.3076	-90.	0.6624
2.0	0	0	1.3410	-90.~90	1.3150	± 67.5	1.3410	-90.~90	1.3150
	1/3	-67.5	1.3423	-90.	1.3164	67.7	1.3455	90.	1.3231
	1/2	-67.8	1.3468	-90.	1.3215	68.1	1.3679	90.	1.3464
	2/3	-68.9	1.3584	-90.	1.3369	69.1	1.4161	90.	1.3975
∞	0	± 68.0	2.0416	-90.~90	1.9838	± 68.0	2.0416	-90.~90	1.9838
	1/3	-68.0	2.0480	-90.	1.9454	68.2	2.0755	90.	1.9958
	1/2	-68.4	2.0695	-90.	1.9691	68.8	2.1816	90.	2.1808
	2/3	-70.2	2.1302	-90.	2.0461	70.4	2.4107	90.	2.4227

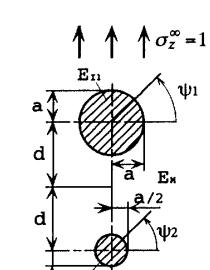
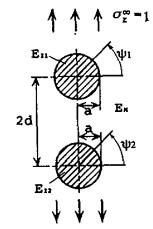


表 9 弾性率の異なる二つの球状介在物の最大応力とその発生位置 ($a_1=a_2$, $a_1/b_1=a_2/b_2=1$, $\sigma_r^\infty=0$, $\sigma_z^\infty=1$)

a/d	Inclusion 1 $E_{I1}/E_M=0.5$				Inclusion 2 $E_{I2}/E_M=2.0$			
	Matrix		Inclusion		Matrix		Inclusion	
	ψ_1 (deg.)	σ_{\max}	ψ_1 (deg.)	σ_{\max}	ψ_2 (deg.)	σ_{\max}	ψ_2 (deg.)	σ_{\max}
0	0.	1.3481	-90~90	0.6789	±67.5	1.3410	-90~90	1.3150
1/3	0.	1.3660	90.	0.6732	67.7	1.3482	-90.	1.3216
1/2	0.	1.4064	90.	0.6600	68.1	1.3710	-90.	1.3448
2/3	0.1	1.4947	90.	0.6322	69.1	1.4233	-90.	1.3974



a/d が大きくなるにつれて母材と介在物境界に生じる応力は大きくなることがわかる。また、 $a/d=0$ および 0.9 のとき $E_I/E_M=0.5, 2.0, \infty$ の場合の母材の境界に沿った $\sigma_n, \sigma_t, \sigma_\theta, \sigma_1, \tau_{nt}$ の分布を図 6~11 に示す。以上の結果より球状介在物の干渉効果が大きく現れるのは、二つの介在物が近接したごく一部に限定されることがわかる。特に、剛体介在物の場合にはこの干渉効果は大きく現れる。

3・2 等大2球状介在物が $\sigma_z^\infty=0, \sigma_r^\infty=1$ を受ける場合 $a_1=a_2, a_1/b_1=a_2/b_2=1, E_{I1}/E_M=E_{I2}/E_M=0$ (球状空かの干渉問題) のとき A点 ($\psi=-90^\circ$) と B点 ($\psi=90^\circ$) における σ_θ の値を土田ら⁽¹⁰⁾ の解析結果の図からの読み取り値とともに表 5 に示す。表 5 より土田らの解析結果は本解析結果とよく一致していることがわかる。また、 $E_{I1}/E_M=E_{I2}/E_M=0, 0.5, 2.0, \infty, \nu_{I1}=\nu_{I2}=\nu_M=0.3$ の場合、最大応力の値とその発生位置を表 6 に示す。

3・3 等大2だ円体状介在物の場合ならびに球状介在物の大きさ、弾性係数が異なる場合 $\sigma_z^\infty=1, \sigma_r^\infty=0$ の場合二つの介在物の大きさが異なる場合の最大応力の値とその発生位置を表 8 に示す。また、弾性係数が異なる場合の最大応力の値とその発生位置を表 9 に示す。

$\sigma_z^\infty=1, \sigma_r^\infty=0$ の場合二つの介在物の大きさが異なる場合の最大応力の値とその発生位置を表 8 に示す。また、弾性係数が異なる場合の最大応力の値とその発生位置を表 9 に示す。

4. 結 言

本研究では体積力法の特異積分方程式を利用して無限体中の回転だ円体状介在物の干渉効果を精度よく解析する方法を示した。具体的な問題として、無限体中の二つの回転だ円体状介在物の干渉効果を考察した。特異積分方程式の数値解析には未知関数である体積力密度を 8 種類の基本密度関数と多項式の積で近似する方法により、母材と介在物の境界上の応力と変位に関する高い境界条件の満足度が少ない計算時間で得られた。また、二つの介在物の大きさや弾性係数が異なる場合の解析も行い得られた結果を図表にまとめた。本論文に示した数値解析法には母材と介在物の境界上のなめらかな応力分布が少ない計算時間で得られることから種々だ円体状介在物の問題に応用可能である。

最後に、論文をまとめるにあたり協力いただいた九州工業大学卒論学生、金子尊君に感謝する。

文 献

- (1) 野田・松尾, 機論, 58-555, A (1992), 2179.
- (2) 野田・松尾, 機論, 59-559, A (1993), 785.
- (3) 野田・松尾, 機論, 59-564, A (1993), 1964.
- (4) 野田・松尾, 機論, 60-578, A (1994), 2411.
- (5) 野田・松尾, 機論, 60-580, A (1994), 2767.
- (6) 野田・松尾・石井, 機論, 61-581, A (1995), 106.
- (7) 西谷, 機誌, 70-580 (1967), 627.
- (8) 野田, 九州大学学位論文, (1984), 15.
- (9) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 89, 塔風館.
- (10) 土田・中原・小玉, 機論, 42-353 (1976), 46.